

Name, Matrikelnummer: _____

Aufgabe 1: (30 Punkte)

Markieren Sie die von Ihnen gewählte Antwort eindeutig. Bitte beachten Sie, dass mehrere Antworten richtig sein können. Falschantworten führen nicht zu Punktabzug bei anderen Teilaufgaben.

- a) Geben Sie den asymptotischen Phasenwinkel der Frequenzgänge der folgenden Übertragungsfunktionen für $\omega \rightarrow \infty$ an!

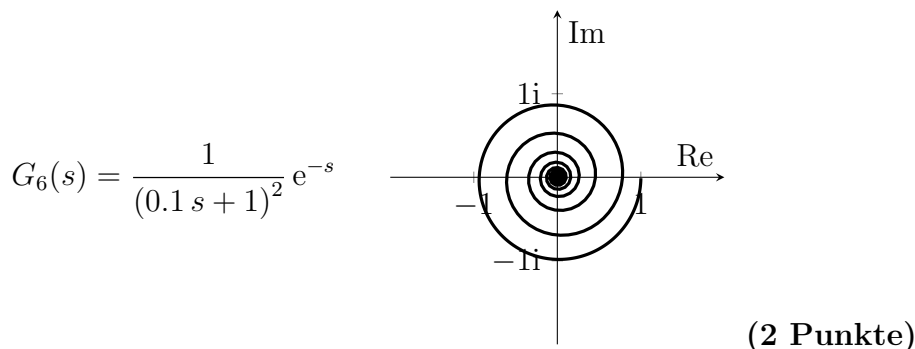
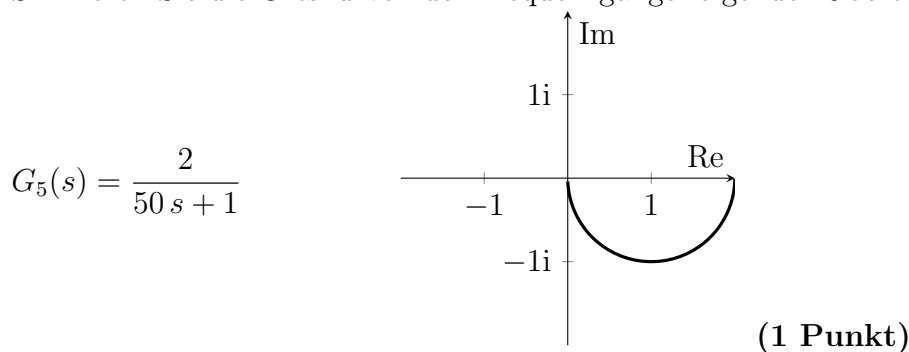
$$G_1(s) = \frac{1}{s} \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \varphi_1(\omega) = \boxed{-90^\circ} \quad (1 \text{ Punkt})$$

$$G_2(s) = \frac{1}{s(Ts + 1)} \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \varphi_2(\omega) = \boxed{-180^\circ} \quad (1 \text{ Punkt})$$

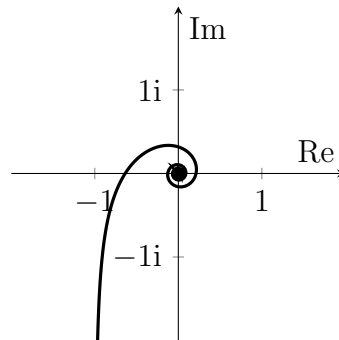
$$G_3(s) = \frac{s + 5}{(s + 2)(s + 3)} \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \varphi_3(\omega) = \boxed{-90^\circ} \quad (1 \text{ Punkt})$$

$$G_4(s) = \frac{-2s^2 + 3s + 1}{s^2 + 2s + 1} \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \varphi_4(\omega) = \boxed{-180^\circ} \quad (1 \text{ Punkt})$$

- b) Skizzieren Sie die Ortskurven der Frequenzgänge folgender Übertragungsfunktionen!

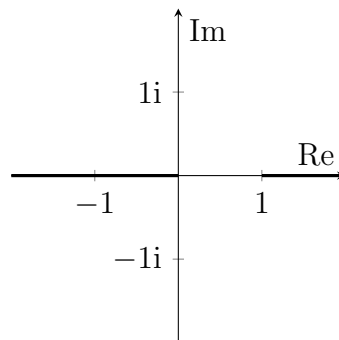


$$G_7(s) = \frac{1}{s} e^{-s}$$



(2 Punkte)

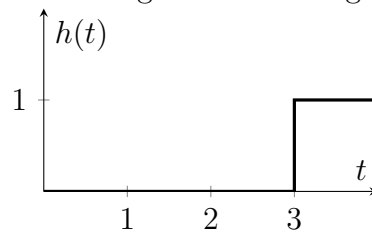
$$G_8(s) = \frac{1}{s^2 + 1}$$



(2 Punkte)

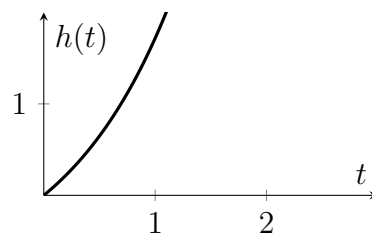
c) Skizzieren Sie die Sprungantworten folgender Übertragungsfunktionen!

$$G_9(s) = e^{-3s}$$



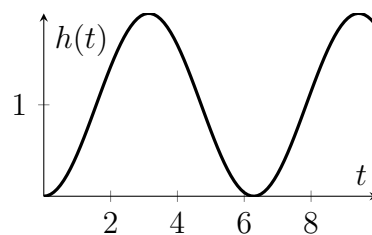
(1 Punkt)

$$G_{10}(s) = \frac{1}{s - 1}$$



(1 Punkt)

$$G_{11}(s) = \frac{1}{s^2 + 1}$$



(2 Punkte)

- d) Die Differentialgleichung $\dot{y} + y = u$ beschreibt ein schwingungsfähiges System. **(1 Punkt)**
☐ Ja
☒ Nein
- e) Man kann jede Übertragungsfunktion $G(s)$ in eine Zustandsraumdarstellung umformen. **(1 Punkt)**
☒ Ja
☐ Nein
- f) Die Ortskurven der Frequenzgänge von Übertragungsfunktionen enden stets im Ursprung. **(1 Punkt)** ☐ Ja
☒ Nein
- g) Aus einem Bode-Diagramm lässt sich eindeutig ein Nyquist-Diagramm herleiten. **(1 Punkt)**
☒ Ja
☐ Nein
- h) Die Eigenwerte einer Zustandsraumdarstellung eines linearen Systems entsprechen den Polen der zugehörigen Übertragungsfunktion. **(1 Punkt)**
☒ Ja
☐ Nein
- i) Aus der Übertragungsfunktion eines linearen Systems kann man den Phasengang (bis auf ein Vielfaches von 360°) eindeutig berechnen. **(1 Punkt)**
☒ Ja
☐ Nein
- j) Die Systeme $G(s)$ und $\hat{G}(s) = 10 \cdot G(s)$ haben identische Phasengänge. **(1 Punkt)**
☒ Ja
☐ Nein
- k) Welche der folgenden Eigenschaften treffen auf das System zu, welches durch die Übertragungsfunktion $G(s) = \frac{s^2 + 5s + 3}{4s^3 + s^2 + s}$ beschrieben wird? **(2 Punkte)**
☒ kausal
☒ grenzstabil
☐ instabil
☐ asymptotisch stabil
☐ totzeitbehaftet
☒ minimalphasig
☒ Integratorverhalten

- l) Untersuchen Sie die Übertragungsfunktion des folgenden Systems 5. Ordnung auf asymptotische Stabilität!

$$G(s) = \frac{1-s}{s^5 + 24s^3 + 12s^2 + 10s + 4}$$

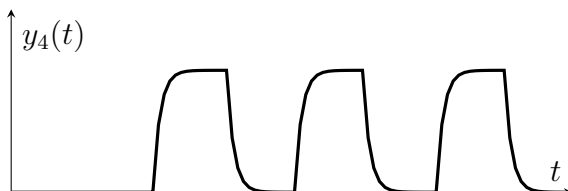
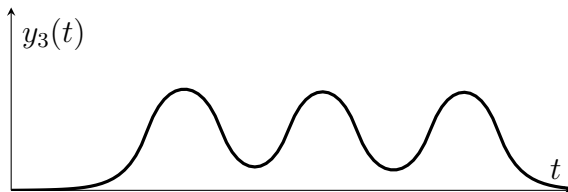
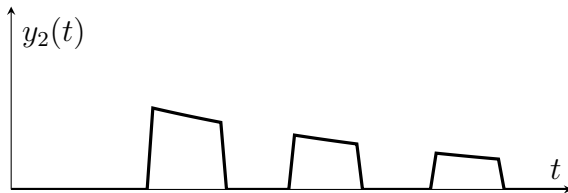
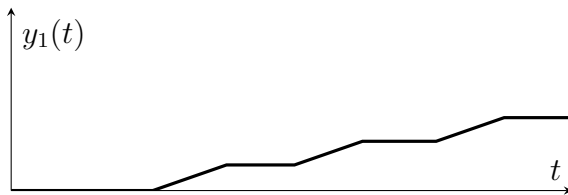
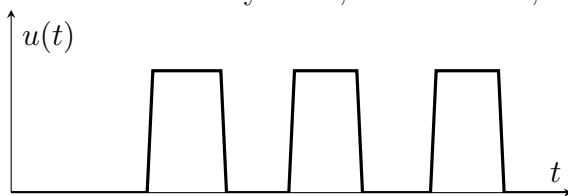
(1 Punkt)

- ☐ Sie ist asymptotisch stabil.
☒ Sie ist nicht asymptotisch stabil.

- m) Durch eine Ähnlichkeitstransformation können sich die Eigenwerte der Systemmatrix eines Systemes in Zustandsraumdarstellung ändern. **(1 Punkt)**

- ☐ Ja
☒ Nein

- n) Im folgenden ist eine Systemanregung $u(t)$ dargestellt, mit der verschiedene lineare System angeregt werden. Der sich ergebende Systemausgang $y_i(t)$ ist jeweils dargestellt. Entscheiden Sie für alle Systeme, ob sie kausal, zeitvariant und/oder dynamisch sind.



- ☒ kausal
☐ zeitvariant
☒ dynamisch
(1 Punkt)

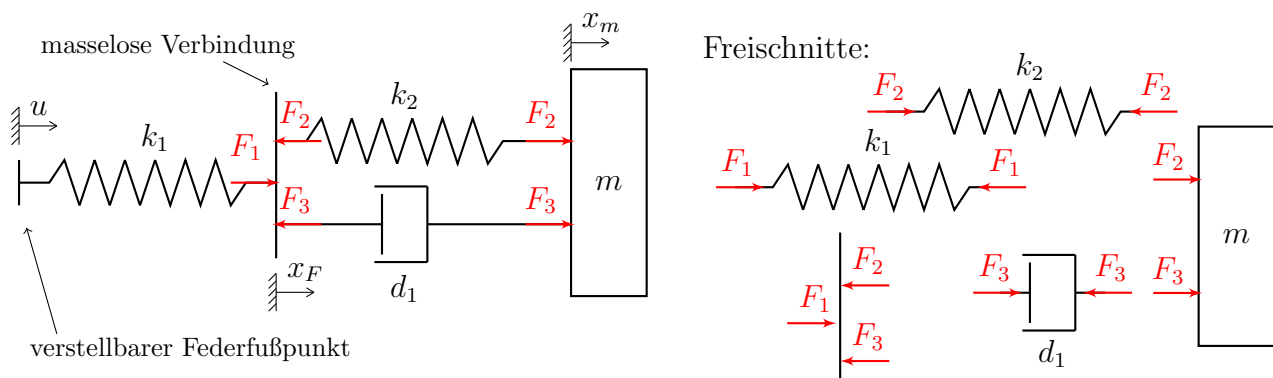
- ☒ kausal
☒ zeitvariant
☐ dynamisch
(1 Punkt)

- ☐ kausal
☐ zeitvariant
☒ dynamisch
(1 Punkt)

- ☒ kausal
☐ zeitvariant
☒ dynamisch
(1 Punkt)

Aufgabe 2: (10 Punkte)

Diese Aufgabe behandelt die Modellierung technischer Prozesse. Es soll ein mathematisches Modell für eine Aufhängung hergeleitet werden, die aus einer Masse, zwei Federn und einem Dämpfungsglied besteht. Alle Bauteile verhalten sich linear.



- Charakterisieren Sie die Stabilität dieses Systems anhand der physikalischen Anschauung!
- Von welcher Ordnung ist dieses System?

Lösung:

Aufgrund des Dämpfungsgliedes ist das System asymptotisch stabil. (1 Punkt)

Es hat die Ordnung 3. (1 Punkt)

- Leiten Sie ein mathematisches Modell in Zustandsraumdarstellung her, welches die Dynamik dieses Systems beschreibt. Verwenden Sie die eingezeichneten Variablen. In der Ruhelage gilt für die Auslenkungen $x_F = x_m = 0$. Wählen Sie den Zustandsvektor als $\underline{x} = [x_m, \dot{x}_m, x_F]^\top$.

Lösung:

Zunächst werden für alle Bauteile Gleichungen aufgestellt (5 Punkte):

$$\left. \begin{aligned}
 &\text{Impulssatz für Masse } m: \quad m \cdot \ddot{x}_m = F_2 + F_3 \\
 &\text{Impulssatz an Verbindung } x_F: \quad F_1 - F_2 - F_3 = m \cdot \ddot{x}_F \\
 &\text{Federgleichung für Feder } k_1: \quad F_1 = k_1 \cdot (u - x_F) \\
 &\text{Federgleichung für Feder } k_2: \quad F_2 = k_2 \cdot (x_F - x_m) \\
 &\text{Dämpfergleichung für Dämpfer } d_1: \quad F_3 = d_1 \cdot (\dot{x}_F - \dot{x}_m)
 \end{aligned} \right\} \begin{aligned}
 &m \cdot \ddot{x}_m = k_2 \cdot (x_F - x_m) + d_1 \cdot (\dot{x}_F - \dot{x}_m) \\
 &\dot{x}_F = \dot{x}_m - \frac{k_1}{d_1} (x_F - u) - \frac{k_2}{d_1} \cdot (x_F - x_m)
 \end{aligned}$$

Diese Gleichungen lassen sich weiter vereinfachen zu (1 Punkt):

$$\begin{aligned}m \cdot \ddot{x}_m &= -k_1 (x_F - u) \\ \dot{x}_F &= \dot{x}_m - \frac{k_1}{d_1} (x_F - u) - \frac{k_2}{d_1} \cdot (x_F - x_m)\end{aligned}$$

Diese lassen sich in folgender Zustandsraumdarstellung darstellen (2 Punkte):

$$\underline{\dot{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{k_1}{m} \\ \frac{k_2}{d_1} & 1 & \left(-\frac{k_1}{d_1} - \frac{k_2}{d_1}\right) \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k_1}{m} \\ \frac{k_1}{d_1} \end{bmatrix} u.$$

Aufgabe 3: (15 Punkte)

Gegeben ist folgendes System in Zustandsraumdarstellung:

$$\begin{aligned}\dot{\underline{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad \underline{x}(0) = \underline{x}_0, \\ y &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \underline{x}.\end{aligned}$$

- a) Berechnen Sie die Eigenwerte der Systemmatrix!

Lösung:

Ein Eigenwert bei -2 kann direkt aus der Blockdiagonalstruktur abgelesen werden. Die verbleibende Untermatrix hat das char. Polynom $s^2 + 4s + 3$ mit den weiteren Lösungen -1 und -3 . (2 Punkte)

- b) Berechnen Sie die Transitionsmatrix e^{At} ! (7 Punkte)

Lösung:

Die Fundamentalmatrix wird hier über die Laplace-Transformation hergeleitet:

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 3 & s+4 & 0 \\ 0 & 0 & s+2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{s+4}{s^2+4s+3} & \frac{1}{s^2+4s+3} & 0 \\ \frac{-3}{s^2+4s+3} & \frac{s}{s^2+4s+3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix}$$

Die Laplace-Rücktransformation lautet:

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 1.5e^{-t} - 0.5e^{-3t} & 0.5e^{-t} - 0.5e^{-3t} & 0 \\ -1.5e^{-t} + 1.5e^{-3t} & -0.5e^{-t} + 1.5e^{-3t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}$$

- c) Bestimmen Sie die Sprungantwort dieses Systems!

Lösung:

Hier bringt der richtige Ansatz (1 Punkt), für eine richtige Lösung (5 Punkte):

$$\begin{aligned}y(t) &= C e^{At} x(0) + \int_0^t C e^{A\tau} B u(t - \tau) d\tau + D u(t) \\ &= \int_0^t -0.5e^{-t} + 1.5e^{-3t} + e^{-2t} d\tau = [0.5e^{-t} - 0.5e^{-3t} - 0.5e^{-2t}]_0^t \\ &= \frac{1}{2} (1 + e^{-t} - e^{-3t} - e^{-2t}).\end{aligned}$$

Aufgabe 4: (10 Punkte)

Gegeben ist folgendes System in Zustandsraumdarstellung:

$$\begin{aligned}\dot{\underline{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -300 & -200 & -100 & -k \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad \underline{x}(0) = \underline{x}_0, \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \underline{x}.\end{aligned}$$

- a) Das System liegt in einer besonderen Darstellung vor. Wie nennt man diese?

Lösung:

Es handelt sich um eine Regelungsnormalform. (1 Punkt)

- b) Für welche Parameter k ist das System asymptotisch stabil?

Lösung:

Aus der letzten Zeile der Systemmatrix in Frobenius-Form lassen sich die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms ablesen (1 Punkt). Dieses lautet:

$$s^4 + k s^3 + 100s^2 + 200s + 300 = 0.$$

Es erfüllt das Vorzeichenkriterium für $k > 0$. (1 Punkt)

Das Hurwitz-Kriterium (1 Punkt) liefert nun notwendige und hinreichende Bedingungen für asymptotische Stabilität.

Im Falle von Systemen 4. Ordnung müssen folgende Bedingungen geprüft werden (vgl. Hilfsblatt zum Hurwitz-Kriterium) (2 Punkte):

$$\begin{aligned}k \cdot 100 - 200 \cdot 1 &> 0 \\ 200 \cdot (k \cdot 100 - 200 \cdot 1) - 300 k^2 &> 0.\end{aligned}$$

Diese lassen sich vereinfachen zu (2 Punkte):

$$\begin{aligned}k &> 2 \\ 3k^2 - 200k + 400 &< 0.\end{aligned}$$

Die zweite Bedingung ist auf Gleichheit erfüllt bei $k = \frac{200 \pm \sqrt{35200}}{6} = \{2.06, 64.60\}$. Da die Parabel nach oben geöffnet ist, muss k zwischen diesen Grenzen liegen. Entsprechend ist das System stabil für $k \in (2.06, 64.60)$. (2 Punkte)

Aufgabe 5: (5 Punkte)

Beantworten Sie zunächst zwei allgemeine Fragen:

- a) Sind alle minimalphasigen System stabil? Wenn nein, geben Sie ein Gegenbeispiel an!

Lösung:

Nein, z.B. der Doppelintegrator $G(s) = \frac{1}{s^2}$ ist instabil. (1 Punkt)

- b) Sind alle Allpass-Systeme stabil? Wenn nein, geben Sie ein Gegenbeispiel an!

Lösung:

Nein, z.B. der Allpass $G(s) = \frac{s+1}{s-1}$ ist instabil. (1 Punkt)

Gegeben ist nun folgende nichtminimalphasige Übertragungsfunktion:

$$G(s) = \frac{s^2 - 4}{s^2 + 2s + 1}.$$

- c) Zerlegen Sie diese Funktion in ihr Phasenminimumsystem $G_M(s)$ und den zugehörigen Allpass $G_A(s)$! (1 Punkt)

Lösung:

Die Zerlegung lautet:

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{s^2 - 4}{s^2 + 2s + 1} \\ &= \frac{(s+2)(s-2)}{(s+1)^2} = \underbrace{\frac{(s+2)^2}{(s+1)^2}}_{G_M(s)} \cdot \underbrace{\frac{(s-2)}{(s+2)}}_{G_A(s)} \end{aligned}$$

- d) Welchen Amplitudengang hat der Allpassanteil $G_A(s)$?

Lösung:

Der Amplitudengang eines Allpassgliedes ist $\|G_A(j\omega)\| = 1 \forall \omega$. (1 Punkt)

Nun wird ein System $G^*(s)$ eingeführt, das einer Reihenschaltung eines Totzeitgliedes ($T_t = 5$) und der obigen Übertragungsfunktion $G(s)$ entspricht.

- e) Geben Sie auch für $G^*(s)$ das Phasenminimumsystem $G_M^*(s)$ und den zugehörigen Allpass $G_A^*(s)$ an! (1 Punkt)

Lösung:

$$G^*(s) = \frac{s^2 - 4}{s^2 + 2s + 1} \cdot e^{-5s} = \underbrace{\frac{(s+2)^2}{(s+1)^2}}_{G_M^*(s)} \cdot \underbrace{\frac{(s-2)}{(s+2)}}_{G_A^*(s)} \cdot e^{-5s}$$

Aufgabe 6: (15 Punkte)

In dieser Aufgabe wird ein System untersucht, dessen Eingangs-Ausgangs-Verhalten durch folgende Differentialgleichung beschrieben werden kann:

$$\ddot{y} + \dot{y} + y = 10 u.$$

- a) Geben Sie die zugehörige Übertragungsfunktion $G(s)$ an! **(1 Punkt)**

Lösung:

$$G(s) = \frac{10}{s^2 + s + 1}$$

- b) Charakterisieren Sie das dynamische Übertragungsverhalten qualitativ in wenigen Worten!

Lösung:

*Das System hat den relativen Grad 2, ist minimalphasig, ist asymptotisch stabil und schwingungsfähig (aber gedämpft). **(2 Punkte)***

- c) Berechnen Sie den Amplitudengang $A(\omega)$ dieses Systems! **(2 Punkte)**

Lösung:

$$A(\omega) = \frac{||10||}{||-\omega^2 + j\omega + 1||} \frac{10}{\sqrt{(1 - \omega^2)^2 + \omega^2}}$$

- d) Berechnen Sie den Phasengang $\varphi(\omega)$ dieses Systems! **(2 Punkte)**

Lösung:

$$\varphi(\omega) = -\angle(1 - \omega^2 + j\omega) = \arctan\left(\frac{1 - \omega^2}{\omega}\right) - \frac{\pi}{2}.$$

- e) Wo beginnt die Ortskurve des Frequenzgangs in der komplexen Ebene und wo endet sie? Beschreiben Sie das Aussehen der Ortskurve nahe dem Endpunkt! **(2 Punkte)**

Lösung:

Die Ortskurve beginnt bei 10 auf der reellen Achse und endet im Ursprung. Da der relative Grad 2 ist, nähert sie sich für hohe Frequenzen dem Ursprung auf der negativen reellen Achse.

- f) Zeichnen Sie nun die Geradenapproximation des Amplitudengangs und die Treppenapproximation des Phasengangs! Verwenden Sie zum Zeichnen des Bodediagramms bitte einen der Vordrucke auf den nächsten Seiten.

Lösung:

Siehe nächstes Blatt. (3 Punkte)

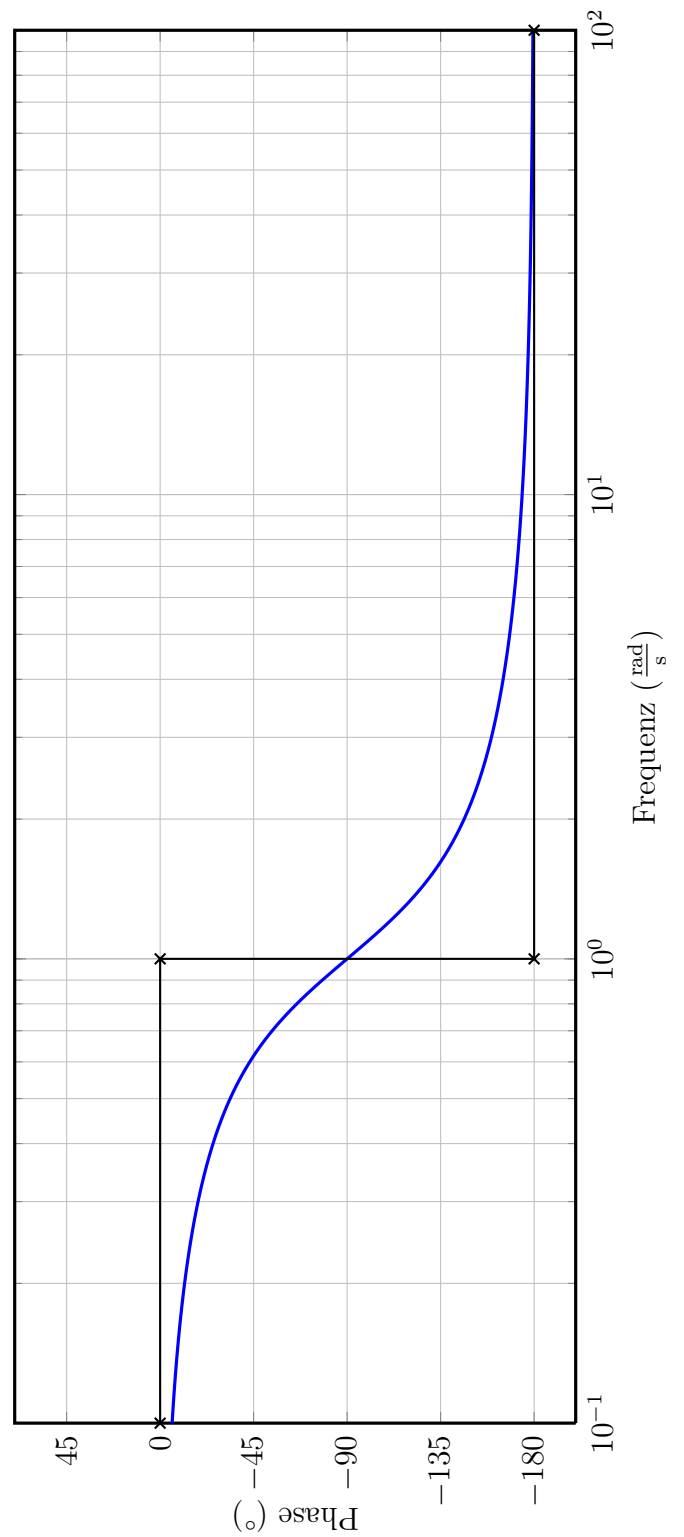
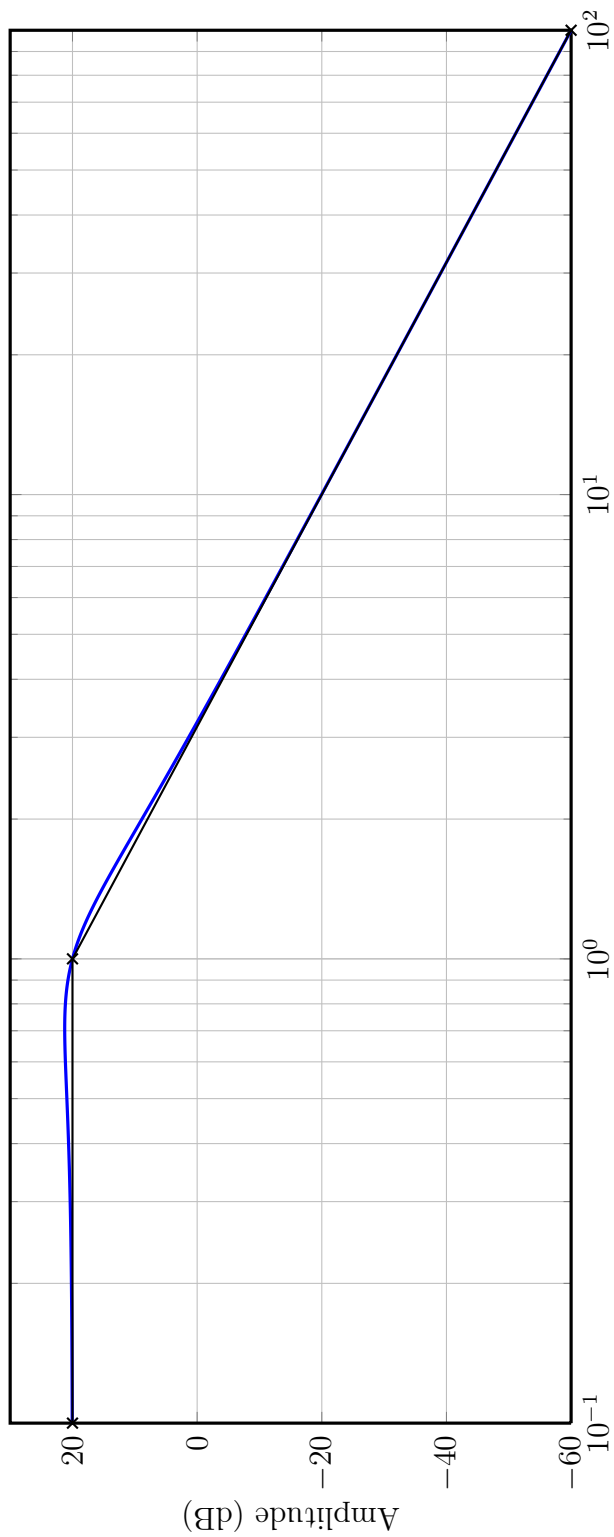
- g) In welchen Frequenzbereichen geben die Geradenapproximationen und die Treppenapproximation die Funktionen $A(\omega)$ und $\varphi(\omega)$ gut und wo weniger gut wieder?

Lösung:

Asymptotisch für $\omega \rightarrow 0$ und $\omega \rightarrow \infty$ geben die Approximationen den Frequenzgang exakt wieder (1 Punkt).

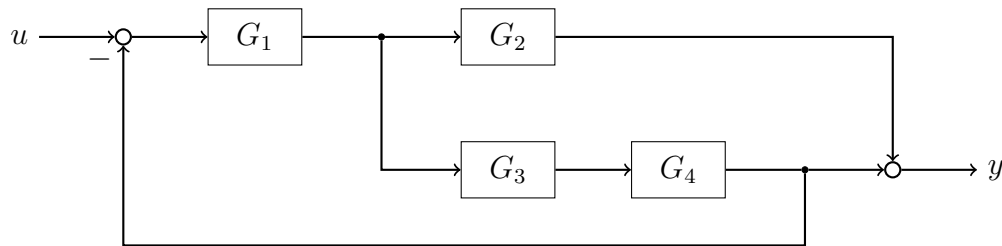
Der Amplitudengang wird zudem an der Eckfrequenz exakt wiedergegeben. Dies ist allerdings nur „zufällig“ der Fall, da die Dämpfung gerade $D = 0.5$ beträgt (vgl. Hilfsblatt „Beispiele für Bode-Diagramme“) (1 Punkt).

Die vorhandene Dämpfung reicht aber schon aus, um den Phasengang in der Umgebung der Resonanzfrequenz deutlich zu verschleifen (1 Punkt).



Aufgabe 7: (5 Punkte)

Betrachten Sie folgende Verschaltung einfacher Übertragungsglieder:



Bestimmen Sie dazu die Gesamtübertragungsfunktion!

Lösung:

Die Lösung lässt sich durch das Einführen von Zwischengrößen finden (**5 Punkte**).
 Dabei bezeichne y_1 den Ausgang des Systems G_1 :

$$\begin{aligned}
 y &= G_4 G_3 y_1 + G_2 y_1 = (G_2 + G_4 G_3) y_1 \\
 y_1 &= G_1 (u - G_4 G_3 y_1) \\
 y_1 &= \frac{G_1}{1 + G_1 G_4 G_3} u \\
 y &= \frac{G_1 (G_2 + G_4 G_3)}{1 + G_1 G_4 G_3} u
 \end{aligned}$$

Punkte für Aufgabe 1: 30 von 30

Punkte für Aufgabe 2: 10 von 10

Punkte für Aufgabe 3: 15 von 15

Punkte für Aufgabe 4: 10 von 10

Punkte für Aufgabe 5: 5 von 5

Punkte für Aufgabe 6: 15 von 15

Punkte für Aufgabe 7: 5 von 5

Insgesamt vergebene Punkte: 90 von 90